①

$$(P) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$$

$$A\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$(D) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\5\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}t ; t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$(D') = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\1/2\end{pmatrix}t' ; t' \in \mathbb{R}\right\}$$

1) <u>Determinons $(D) \cap (D')$</u>

Soit $I\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$I \in (D) \cap (D') \iff I \in (D)$ et $I \in (D')$

$\iff$ il existe $t, t' \in \mathbb{R}$ /

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8-t\\5+4t\\t\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-2t'\\1+2t'\\-1+t'/2\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -8-t = -1-2t' & ① \\ 5+4t = 1+2t' & ② \\ t = -1+t'/2 & ③ \end{cases}$$

① $\Rightarrow t = -7 + 2t'$ (*)

① dans ② $\Rightarrow 5 + 4(-7 + 2t') = 1 + 2t'$

$\Rightarrow t' = 4$

(*) $\Rightarrow t = 1$

on obtient $1=1$, ce qui est vrai

Donc $\begin{cases} x = -8-1 = -9 \\ y = 5+(4\times 1) = 9 \\ z = 1 \end{cases}$

Ainsi, $(D)\cap(D') = I\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Soit $B\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ;

alors $**\begin{cases} B \in (P) \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_1 = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_2 = 0 \end{cases}$

où $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ representent deux vecteurs (linéairement indépendants) engendrant (P).

$$** \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ \begin{pmatrix} a-2 \\ b-2 \\ c-2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b-2 \\ c-2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

ie $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-c=0 \\ a=b \end{cases}$

~~sil~~ $a=b=c=1/3$

ie $B\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$$d = AB = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-2\right)^2}$$

$$\cancel{= \sqrt{(-3-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2}}$$

$$\cancel{= 5} \quad = \sqrt{3 \times \frac{25}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

3) Soit (P') le plan contenant A et parallèle aux droites (Δ) et (Δ').

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace ;

$M \in (P') \Rightarrow \overrightarrow{AM}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont liés

$\Rightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}, \vec{v}') = 0$

où $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}'\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ représentent des vecteurs directeurs ~~de~~ (Δ) et (Δ') respectivement.

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}, \vec{v}') = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ y-2 & 4 & 2 \\ z-2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ +1 & 1/2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y - 4z = -6$$

$$(P') : y - 4z = -6$$

Puisque $(D) \cap (D') \neq \emptyset$, alors le plan (P') est parallèle au plan ~~p~~ contenant (D) et (D').

En general, la distance d'un point $G\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ à un Plan (Q): $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$

est donnée par

$$\frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Ainsi, la distance de $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ au plan (P'): $0x + y - 4z + 6 = 0$ est

donnée par $\dfrac{|0 \times 0 + 1 \times 0 + 4 \times 0 + 6|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{17}}$

$$= \frac{6\sqrt{17}}{17}$$